

Serie 10

1. Wir betrachten einen Kreis mit zufälligem Radius R . Der Radius R sei exponentialverteilt mit Erwartungswert $1/\lambda$. Bestimmen Sie

- a) die Verteilungs- und Dichtefunktion des Flächeninhalts A des zufälligen Kreises;
- b) den Erwartungswert von A .

Eine Zufallsvariable X habe die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{(1+x)^5}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

- c) Finden Sie c und die Verteilungsfunktion von X .
- d) Finden Sie $E[X]$ und $E[X^2]$.
HINWEIS: Berechnen Sie zuerst $E[1+X]$ und $E[(1+X)^2]$.
- e) Was sind die Verteilungsfunktion und die Dichte von $Y = e^X$?

2. Herr Meier fährt täglich mit konstanter Geschwindigkeit dieselbe Strecke s_0 (zum Beispiel von Zürich nach Bern, $s_0 = 120$ km). Die Geschwindigkeit V hängt vom Wetter und den Verkehrsbedingungen ab, und ihre Dichte ist von der Form

$$f_V(v) = \begin{cases} C v^2 e^{-\lambda v}, & \text{falls } v \geq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und dem Mittel $E[V] = v_0$ (zum Beispiel $v_0 = 90$ km/h).

- a) Bestimmen Sie die Werte der Parameter C und λ .
HINWEIS: Benützen Sie $\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!$.
- b) Berechnen Sie die Varianz von V .
- c) Die Fahrzeit ist $T = s_0/V$. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von T .

3. Die Zufallsvariable X besitze eine Standardnormalverteilung, die Zufallsvariable Y sei normalverteilt mit Erwartungswert -0.2 und Standardabweichung 3 . Bestimmen Sie mit Hilfe der Tabelle im Anhang die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P[X < -1.01], \quad P[-3.02 < X \leq 1], \quad P[Y \leq 8.8], \quad P[0.43 \leq |Y| < 1.54].$$

4. Eine Stadtverwaltung plant den Bau eines neuen Grossparkplatzes am Stadtrand. Erfahrungsgemäss kommen an Werktagen $10\,000$ Fahrzeuge in die Stadt. Aufgrund einer Umfrage nimmt die Stadtverwaltung an, dass die Fahrer der Autos sich unabhängig voneinander entscheiden, ob sie den neuen Parkplatz benutzen wollen, wobei die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrer sich für den neuen Parkplatz entscheidet, $p_0 = 80\%$ beträgt.

- a) Wie viele Stellplätze sollte der neue Parkplatz mindestens aufweisen, damit die Stellplätze unter obiger Annahme mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% ausreichen?
- b) Ein Jahr nach dem Bau des Parkplatzes stellt ein Verwalter fest, dass jeweils immer noch $10\,000$ Autos in die Stadt fahren, aber nur 7500 der neuen Parkplätze besetzt sind. Daraus schliesst er, dass der damals angenommene Wert von $p_0 = 80\%$ für die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Fahrer für den neuen Parkplatz entscheidet, "eindeutig" zu hoch war. Beurteilen Sie seine Folgerung, indem sie folgende Werte berechnen.
- i) Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 7500 Parkplätze besetzt werden, falls $p_0 = 80\%$ die richtige Wahrscheinlichkeit ist.
- ii) Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 7500 Parkplätze besetzt werden, falls $p_1 = 76\%$ die richtige Wahrscheinlichkeit ist.
- iii) Finden Sie diejenige Wahrscheinlichkeit p^* , dass sich ein Fahrer für den neuen Parkplatz entscheidet, *so dass* die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 7500 Parkplätze besetzt werden, genau 5% beträgt.

HINWEIS: Benützen Sie jeweils eine geeignete Normalverteilung als Approximation für die Verteilung der belegten Parkplätze.

Abgabe: Montag 29. Mai Übungsstunde.

Siehe nächstes Blatt!

Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$\Phi(a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.0 | .5000 | .5040 | .5080 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359 |
| 0.1 | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5753 |
| 0.2 | .5793 | .5832 | .5871 | .5910 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141 |
| 0.3 | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6331 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517 |
| 0.4 | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .6700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879 |
| 0.5 | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224 |
| 0.6 | .7257 | .7291 | .7324 | .7357 | .7389 | .7422 | .7454 | .7486 | .7517 | .7549 |
| 0.7 | .7580 | .7611 | .7642 | .7673 | .7704 | .7734 | .7764 | .7794 | .7823 | .7852 |
| 0.8 | .7881 | .7910 | .7939 | .7967 | .7995 | .8023 | .8051 | .8078 | .8106 | .8133 |
| 0.9 | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8315 | .8340 | .8365 | .8389 |
| 1.0 | .8413 | .8438 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621 |
| 1.1 | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830 |
| 1.2 | .8849 | .8869 | .8888 | .8907 | .8925 | .8944 | .8962 | .8980 | .8997 | .9015 |
| 1.3 | .9032 | .9049 | .9066 | .9082 | .9099 | .9115 | .9131 | .9147 | .9162 | .9177 |
| 1.4 | .9192 | .9207 | .9222 | .9236 | .9251 | .9265 | .9279 | .9292 | .9306 | .9319 |
| 1.5 | .9332 | .9345 | .9357 | .9370 | .9382 | .9394 | .9406 | .9418 | .9429 | .9441 |
| 1.6 | .9452 | .9463 | .9474 | .9484 | .9495 | .9505 | .9515 | .9525 | .9535 | .9545 |
| 1.7 | .9554 | .9564 | .9573 | .9582 | .9591 | .9599 | .9608 | .9616 | .9625 | .9633 |
| 1.8 | .9641 | .9649 | .9656 | .9664 | .9671 | .9678 | .9686 | .9693 | .9699 | .9706 |
| 1.9 | .9713 | .9719 | .9726 | .9732 | .9738 | .9744 | .9750 | .9756 | .9761 | .9767 |
| 2.0 | .97725 | .97778 | .97831 | .97882 | .97932 | .97982 | .98030 | .98077 | .98124 | .98169 |
| 2.1 | .98214 | .98257 | .98300 | .98341 | .98382 | .98422 | .98461 | .98500 | .98537 | .98574 |
| 2.2 | .98610 | .98645 | .98679 | .98713 | .98745 | .98778 | .98809 | .98840 | .98870 | .98899 |
| 2.3 | .98928 | .98956 | .98983 | .99010 | .99036 | .99061 | .99086 | .99111 | .99134 | .99158 |
| 2.4 | .99180 | .99202 | .99224 | .99245 | .99266 | .99286 | .99305 | .99324 | .99343 | .99361 |
| 2.5 | .99379 | .99396 | .99413 | .99430 | .99446 | .99461 | .99477 | .99492 | .99506 | .99520 |
| 2.6 | .99534 | .99547 | .99560 | .99573 | .99585 | .99598 | .99609 | .99621 | .99632 | .99643 |
| 2.7 | .99653 | .99664 | .99674 | .99683 | .99693 | .99702 | .99711 | .99720 | .99728 | .99736 |
| 2.8 | .99744 | .99752 | .99760 | .99767 | .99774 | .99781 | .99788 | .99795 | .99801 | .99807 |
| 2.9 | .99813 | .99819 | .99825 | .99831 | .99836 | .99841 | .99846 | .99851 | .99856 | .99861 |
| 3.0 | .998650 | .998694 | .998736 | .998777 | .998817 | .998856 | .998893 | .998930 | .998965 | .998999 |
| 3.1 | .999032 | .999065 | .999096 | .999126 | .999155 | .999184 | .999211 | .999238 | .999264 | .999289 |
| 3.2 | .999313 | .999336 | .999359 | .999381 | .999402 | .999423 | .999443 | .999462 | .999481 | .999499 |
| 3.3 | .999517 | .999534 | .999550 | .999566 | .999581 | .999596 | .999610 | .999624 | .999638 | .999651 |
| 3.4 | .999663 | .999675 | .999687 | .999698 | .999709 | .999720 | .999730 | .999740 | .999749 | .999758 |
| 3.5 | .999767 | .999776 | .999784 | .999792 | .999800 | .999807 | .999815 | .999822 | .999828 | .999835 |
| 3.6 | .999841 | .999847 | .999853 | .999858 | .999864 | .999869 | .999874 | .999879 | .999883 | .999888 |
| 3.7 | .999892 | .999896 | .999900 | .999904 | .999908 | .999912 | .999915 | .999918 | .999922 | .999925 |
| 3.8 | .999928 | .999931 | .999933 | .999936 | .999938 | .999941 | .999943 | .999946 | .999948 | .999950 |
| 3.9 | .999952 | .999954 | .999956 | .999958 | .999959 | .999961 | .999963 | .999964 | .999966 | .999967 |

Beispiel: $\Phi(3.74) = 0.999908$.